4.2.2 Das Master-Theorem

Bei der Analyse von Divide and Conquer Verfahren stößt man meist auf Rekursionen, die sich nicht als lineare Rekursionen formulieren lassen. So führte der Mergesort-Algorithmus beispielsweise zu der Rekursionsgleichung

$$C_n = C_{\lfloor n/2 \rfloor} + C_{\lceil n/2 \rceil} + n \quad \text{für alle } n > 1 \qquad \text{und } \; C_1 = 0.$$

Löst man allgemein ein Problem der Größe n dadurch, dass man es in α Teilprobleme der Größe n/β aufteilt, so erhält man für die Laufzeit $T(n)$ eine Rekursion der Form

$$T(n) = \alpha \cdot T(n/\beta) + f(n),$$

wobei $f(n)$ die Summe der Laufzeiten für die Aufteilung in Teilprobleme während der Divide-Phase und dem Zusammensetzen der Lösungen der Teilprobleme zu einer Lösung des Gesamtproblems während des Conquer-Schritt ist. In konkreten Anwendungen wird die Rekursionsgleichung meist noch dadurch komplizierter, dass die Teilprobleme eine ganzzahlige Größe haben müssen. Man wird also um den Term n/β noch geeignet obere und/oder untere Gaußklammern einfügen müssen. Für eine asymptotische Laufzeitanalyse ist dies jedoch glücklicherweise unerheblich. Darüber hinaus kann man die Laufzeit sehr einfach aus den Werten für α und β und $f(n)$ ablesen. Die entsprechende Aussage ist in der angelsächsischen Literatur unter dem Namen *Master-Theorem* bekannt.

Satz 4.19 ***(Master-Theorem)*** *Seien $\alpha \geq 1$, $\beta > 1$ und $C \geq 0$ Konstanten und sei $f(n)$ eine positive Funktion. Weiter seien $c_1(n), \dots, c_\alpha(n)$ Funktionen mit $|c_i(n)| \leq C$ für alle $1 \leq i \leq \alpha$ und $n \in \mathbb{N}$. Ist dann $T(n)$ eine Funktion mit $T(1) = 0$, die für $n \geq 1$ die Rekursionsgleichung*

$$T(n) = T(n/\beta + c_1(n)) + \cdots + T(n/\beta + c_\alpha(n)) + f(n)$$

erfüllt, dann gilt

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^{\log_\beta \alpha}), & \text{falls } f(n) = O(n^{\log_\beta \alpha - \varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0, \\ \Theta(f(n) \log n), & \text{falls } f(n) = \Theta(n^{\log_\beta \alpha} (\log n)^\delta) \text{ für ein } \delta \geq 0, \\ \Theta(f(n)), & \text{falls } f(n) = \Omega(n^{\log_\beta \alpha + \varepsilon}) \text{ für ein } \varepsilon > 0. \end{cases}$$

Der Beweis des Master-Theorems sprengt den Rahmen dieses Buches. Um jedoch zumindest die Beweisidee vorstellen zu können, beweisen wir eine vereinfachte Form, bei der das ursprüngliche Problem ebenfalls in α Teilprobleme der Größe n/β geteilt wird, allerdings ignorieren wir jetzt die