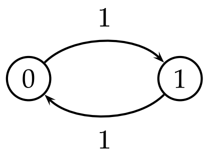

Abbildung 4.6: Eine Markov-Kette mit periodischen Zuständen

$$q_t = \begin{cases} (1,0) & \text{falls } t \text{ gerade,} \\ (0,1) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Kette pendelt also zwischen den beiden Zustandsvektoren $(1,0)$ und $(0,1)$ hin und her und konvergiert somit nicht in eine bestimmte Verteilung. Wir sagen, dass in dieser Kette alle Zustände die Periode 2 besitzen.

Definition 4.15 *Die* Periode *eines Zustands j ist definiert als die größte Zahl $\xi \in \mathbb{N}$, so dass gilt:*

$$\{n \in \mathbb{N}_0 \mid p_{jj}^{(n)} > 0\} \subseteq \{i \cdot \xi \mid i \in \mathbb{N}_0\}$$

Ein Zustand mit Periode $\xi = 1$ heißt aperiodisch. *Wir nennen eine Markov-Kette aperiodisch, wenn alle Zustände aperiodisch sind.*

Wir wollen uns nun überlegen, wie man entscheidet, ob eine Markov-Kette aperiodisch ist. Dazu ist die folgende Aussage hilfreich, die unmittelbar aus der Definition der Übergangswahrscheinlichkeiten folgt: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt $p_{ii}^{(n)} > 0$ genau dann, wenn es im Übergangsdiagramm einen geschlossenen Weg von i nach i der Länge n gibt.[3] Damit folgt insbesondere: Ein Zustand $i \in S$ einer endlichen Markov-Kette ist sicherlich dann aperiodisch, wenn er im Übergangsdiagramm

- eine Schleife besitzt (also $p_{ii} > 0$) oder
- auf mindestens zwei geschlossenen Wegen W_1 und W_2 liegt, deren Längen l_1 und l_2 teilerfremd sind (für die also $\text{ggT}(l_1, l_2) = 1$ gilt).

Aufbauend auf diesen Überlegungen können wir nun auch die folgende, nützliche Charakterisierung aperiodischer Zustände zeigen.

[3] Unter einem Weg von i nach j in einem gerichteten Graphen versteht man eine Folge von Knoten $i = v_0, v_1, \ldots, v_k, v_{k+1} = j$ in der je zwei aufeinanderfolgende Knoten durch eine gerichtete Kante verbunden sind. Man beachte, dass auf einem Weg manche Knoten durchaus mehrfach vorkommen dürfen. Die genauen Definitionen finden sich in Band I.