Nullhypothese $p_A = p_B = p_C = 1/3$ zu überprüfen. Für die Testgröße erhalten wir

$$L(\vec{x}, N) = T = \frac{(350-1000/3)^2+(320-1000/3)^2+(330-1000/3)^2}{1000/3} = 1{,}4 \ .$$

Dies vergleichen wir mit $\chi^2_{2,0{,}95} \approx 5{,}99$. Wir haben also keinen Anhaltspunkt erhalten, die Nullhypothese abzulehnen.

3.15 Wenn alle Server gleich schnell antworten, ist die Wahrscheinlichkeit für jede Permutation der Antworten gleich groß, nämlich $1/6$. Dies Testen wir wie in Aufgabe 3.14 mit dem χ^2-Test. Für die Testgröße gilt $T = 491{,}6$. Dies ist zu vergleichen mit $\chi^2_{5,0{,}95} \approx 11{,}07$. Der Test liefert also einen signifikanten Hinweis darauf, dass die Server unterschiedlich schnell antworten. Bei genauerem Betrachten der Messwerte stellt man fest, dass Server C entweder sehr langsam oder sehr schnell antwortet. Das könnte daran liegen, dass die Auslastung der Verbindung zu Server C stark schwankt.

3.16 Wir wenden den χ^2-Test Test an und erhalten für die Testgröße den Wert $T = 6{,}04..$ bzw. $20{,}06..$ Dies ist zu vergleichen mit $\chi^2_{10,0{,}95} = 18{,}30..$ Man kann also nur bei der zweiten Zeile signifikant ablehnen, dass die Häufigkeiten einer Zufallsgröße mit Verteilung $\mathrm{Bin}(10, 0{,}3)$ entsprechen.

4.1 Der Wert von Y_t hängt nur von Y_{t-1} und X_t ab, nicht aber von $Y_{t'}$ für $t' < t-1$ und es gilt $p_{ij} = 0$ für $j > i$ (das Minimum kann nicht steigen), sowie $p_{jj} = \Pr[X_t \geq j]$ und $p_{ij} = \Pr[X_t = j]$ für $j < i$. Die Gültigkeit der Markov-Bedingung kann leicht formal nachgerechnet werden.

Z_t ist ebenfalls eine Markov-Kette. Für die Übergangswahrscheinlichkeiten gilt $p_{jj} = \Pr[X_t \leq j]$, sowie $p_{ij} = \Pr[X_t = j]$ für $j > i$. Da die geometrische Verteilung unbeschränkt ist, steigt das Maximum in jedem Schritt mit positiver Wahrscheinlichkeit und es folgt, dass alle Zustände transient sind.

4.2 $(Z_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ ist im Allgemeinen keine Markov-Kette, wie man anhand des folgenden Beispiels einsieht: Die Kette X_t sei gegeben durch die Zustandsmenge $\{-1, 0, 1\}$ und die Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{0,0} = p_{0,1} = 1/2$, $p_{1,-1} = p_{-1,0} = 1$. Dann gilt $\Pr[Z_3 = 1 \mid Z_2 = 1, Z_1 = 1] = 0$. Andererseits gilt $\Pr[Z_3 = 1 \mid Z_2 = 1, Z_1 = 0] = 1$.

4.3 Wir definieren eine Folge von Zufallsvariablen $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ wie folgt: $X_t = 2$, falls $t \equiv 1 \pmod 4$. $X_t = 5$, falls $t \equiv 3 \pmod 4$. Für $t \equiv 0 \pmod 4$ setzen wir $X_t = 0$ bzw. $X_t = 1$ mit Wahrscheinlichkeit jeweils $1/2$. Für $t \equiv 2 \pmod 4$ setzen wir $X_t = 3$ falls $X_{t-2} = 0$ und $X_{t-4} = 3$ oder falls $X_{t-2} = 1$ und $X_{t-4} = 4$. Ansonsten setzen wir $X_t = 4$. X_2 setzen wir mit Wahrscheinlichkeit jeweils $1/2$ auf 3 oder 4. Man überzeugt sich, dass die Bedingung aus der Aufgabenstellung hier erfüllt ist. (X_t) ist aber keine Markov-Kette, da beispielsweise $\Pr[X_t = 3 | X_{t-1} = 2, X_{t-2} = 0, X_{t-4} = 3] \neq \Pr[X_t = 3 | X_{t-1} = 2, X_{t-2} = 0, X_{t-4} = 4]$.