Die folgende Abbildung zeigt das Stirling-Dreieck erster Art für $n = 0, \ldots, 6$.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 0 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 0 & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 0 & & 2 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 0 & & 6 & & 11 & & 6 & & 1 & & \\
 & 0 & & 24 & & 50 & & 35 & & 10 & & 1 & \\
0 & & 120 & & 274 & & 225 & & 85 & & 15 & & 1
\end{array}$$

1.3.4 Zahlpartitionen

Ähnlich wie Mengen als disjunkte Vereinigung von Teilmengen geschrieben werden können, kann auch eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ als Summe von positiven ganzen Zahlen geschrieben werden:

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k.$$

Eine solche Zerlegung der Zahl n in k Summanden wird *Zahlpartition* genannt. Wie schon beim Ziehen von Elementen aus einer Menge, unterscheidet man auch hier zwischen geordneten und ungeordneten Zahlpartitionen.

Ungeordnete Zahlpartitionen. Bei einer *ungeordneten Zahlpartition* kommt es nur auf die Summanden, nicht aber auf deren Reihenfolge an. Beispielsweise stellt $3+1$ dieselbe ungeordnete Partition der Zahl 4 dar wie die Summe $1+3$. Die Anzahl Möglichkeiten, die Zahl n als eine solche ungeordnete Summe von k ganzen Zahlen zu schreiben, wird mit $P_{n,k}$ bezeichnet. Für $k > n$ gilt $P_{n,k} = 0$, für $n \geq 1$ setzt man $P_{n,0} = 0$ und man definiert $P_{0,0} := 1$.

Satz 1.25 *Für die Anzahl ungeordneter k-Partitionen $P_{n,k}$ einer Zahl n gilt für alle $k, n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k$:*

$$P_{n+k,k} = \sum_{j=1}^{k} P_{n,j}.$$

Beweis: Wir verwenden wieder die Summenregel. Dazu unterscheiden wir die Menge der ungeordneten Zahlpartitionen der Zahl $n+k$ mit k Summanden nach der Zahl der Summanden, die den Wert 1 haben. Für eine Partition mit genau i Einsen gilt

$$n + k = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{i \text{ Summanden}} + \underbrace{n_{i+1} + n_{i+2} + \ldots + n_k}_{k-i \text{ Summanden}},$$

wobei $n_{i+1}, \ldots, n_k$ alle größer gleich 2 sind. Setzen wir daher $n'_j := n_j - 1$ für alle $j = i+1, \ldots, k$, so folgt

$$n = n'_{i+1} + n'_{i+2} + \ldots + n'_k.$$

D.h. die n'_j bilden eine Zahlpartition von n mit $k-i$ Summanden. Umgekehrt kann man analog aus jeder Zahlpartition von n mit $k-i$ Summanden eine Zahlpartition von $n+k$ mit k Summanden erzeugen, so dass von den k Summanden genau i gleich 1 sind. Aus der Gleichheitsregel folgt daher, dass es genau $P_{n,k-i}$ viele ungeordnete Zahlpartitionen von $n+k$ mit k Summanden gibt, von denen genau i gleich 1 sind. Wegen $n \geq k \geq 1$ kann i nur die Werte $0, 1, 2, \ldots, k-1$ annehmen. Aus der Summenregel ergibt sich daher wegen $\sum_{i=0}^{k-1} P_{n,k-i} = \sum_{j=1}^{k} P_{n,j}$ die im Satz behauptete Rekursion. $\square$

Geordnete Zahlpartitionen. Bei *geordneten Zahlpartitionen* kommt es auf die Reihenfolge der Summanden an. So kann beispielsweise die Zahl 4 auf drei Arten als Summe von 2 positiven ganzen Zahlen geschrieben werden:

$$4 \;=\; 3+1 \;=\; 1+3 \;=\; 2+2.$$

Um die Anzahl der geordneter Zahlpartitionen zu bestimmen, überlegen wir uns, wie eine geordnete Zahlpartition entsteht. Jede Zahl n kann als Summe von n Einsen geschrieben werden:

$$n = \overbrace{\underbrace{1+\cdots+1}_{x_1}+\underbrace{1+\cdots+1}_{x_2}+\cdots+\underbrace{1+\cdots+1}_{x_k}}^{n}.$$

In der obigen Formel sieht man leicht, dass jede geordnete Zahlpartition eindeutig durch die Wahl derjenigen „+“ Zeichen bestimmt ist, die die x_i trennen. Die Anzahl der geordneten k-Partitionen ist also gleich der Anzahl Möglichkeiten $k-1$ „+“ aus den $n-1$ „+“ auszuwählen. Diese Zahl ist aber, wie wir aus Abschnitt 1.1 wissen, durch $\binom{n-1}{k-1}$ gegeben, und somit gilt der folgende Satz:

Satz 1.26 *Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k$ gilt: Die Anzahl der geordneten k-Partitionen von n ist*

$$\binom{n-1}{k-1}.$$

$\square$

Diophantische Gleichungen. Gilt für eine stetige Funktion $f(x)$ für zwei Werte $a < b$, dass $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$, so besagt der Zwischenwertsatz, dass die Funktion im Intervall (a, b) eine Nullstelle hat. Auch die numerische Bestimmung solch einer Nullstelle ist im Allgemeinen nicht weiter