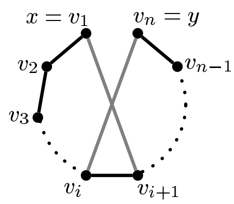

(die Erklärung für die grauen Kanten kommt später) und setzen

$$\begin{aligned} S &:= \{v_i \mid 1 \leq i < n, \{x, v_{i+1}\} \in E\} \text{ und} \\ T &:= \{v_i \mid 1 \leq i < n, \{y, v_i\} \in E\}. \end{aligned}$$

Dann gilt $y = v_n \notin S \cup T$ und $|S \cup T| < |V| = n$. Da andererseits $|S| = \deg(x)$ und $|T| = \deg(y)$, kann dies wegen (2.1) nur gelten, wenn $|S \cap T| > 0$. Sei daher v_i ein beliebiger Knoten in $S \cap T$. Ersetzt man dann in C die beiden Kanten $\{x, y\}$ und $\{v_i, v_{i+1}\}$ durch $\{x, v_{i+1}\}$ und $\{y, v_i\}$, so erhält man wieder einen Hamiltonkreis und damit den gewünschten Widerspruch. □

In obiger Formulierung garantiert der Satz nur die *Existenz* eines Hamiltonkreises. Aus dem Beweis sollte andererseits ersichtlich sein, dass man diesen auch effizient *konstruieren* kann. Man beginnt einfach mit dem vollständigen Graphen, wählt dort einen beliebigen Hamiltonkreis und entfernt dann sukzessive alle nicht zum Graphen gehörenden Kanten, wobei man den Hamiltonkreis jeweils wie im Beweis von Satz 2.36 so modifiziert, dass er die entfernte Kante nicht mehr enthält.

Eine andere Art „Kreis" in einem Graphen geht auf Euler zurück. LEONHARD EULER (1707–1783) war ein Schweizer Mathematiker, der den Großteil seines Lebens in St. Petersburg verbracht hat. Euler war einer der größten und produktivsten Mathematiker, die je gelebt haben. Er hat zu zahlreichen Gebieten der Mathematik und Physik bedeutende Beiträge geliefert. Im Jahre 1736 veröffentlichte er eine Arbeit, die sich mit dem Problem beschäftigte, ob es möglich sei, einen Rundgang durch Königsberg zu machen, bei dem man alle Brücken über die Pregel genau einmal überquert. Diese Arbeit gilt als Ursprung der Graphentheorie.

Definition 2.37 *Eine* Eulertour *in einem Graphen $G = (V, E)$ ist ein Weg, der jede Kante des Graphen genau einmal enthält und dessen Anfangs- und Endknoten identisch sind. Enthält ein Graph eine Eulertour, so nennt man ihn* eulersch.

Enthält G eine Eulertour, so ist der Grad $\deg(v)$ aller Knoten $v \in V$ gerade, denn aus jedem Knoten geht man genauso oft „hinein" wie „heraus". Es gilt sogar die Umkehrung.