**Beweis:** Der Beweis erfolgt durch Induktion über die Anzahl der Kanten. Da $G$ zusammenhängend ist, gilt sicherlich $|E| \geq |V| - 1$. Für die Induktionsverankerung müssen wir daher Graphen $G = (V, E)$ mit $|E| = |V| - 1$ betrachten. Nach Satz 2.19 und 2.22 ist jeder solche Graph $G$ ein Baum. Da ein Baum keine Kreise enthält, beträgt die Anzahl der Gebiete in jeder Einbettung von $G$ genau $1 = |E| - |V| + 2$.

Um auch den Induktionsschritt einzusehen, betrachten wir einen Graphen $G = (V, E)$ mit $|E| > |V| - 1$. Nach Satz 2.19 kann $G$ kein Baum sein. Da $G$ aber nach Voraussetzung zusammenhängend ist, impliziert dies, dass $G$ einen Kreis $C$ enthalten muss. Wir wählen eine beliebige Kante $e$ aus $C$ und entfernen diese aus $E$. In der Einbettung des Graphen trennt der Kreis $C$ das Gebiet auf der linken Seite von $e$ von dem auf der rechten Seite. Durch die Entfernung von $e$ verschmelzen diese beide Gebiete zu einem. Die Anzahl der Gebiete nimmt also, ebenso wie die Anzahl Kanten, um genau eins ab. Da die eulersche Formel für den so entstandenen Graphen nach Induktionsannahme gilt, ist sie daher auch für den Graphen $G$ richtig. □

Aus der eulerschen Polyederformel kann man leicht eine obere Schranke für die Anzahl Kanten eines planaren Graphen ableiten.

**Satz 2.43** *Für jeden planaren Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| \geq 3$ Knoten gilt*

$$|E| \leq 3|V| - 6.$$

**Beweis:** Ohne Einschränkung dürfen wir annehmen, dass $G$ zusammenhängend ist. Wir betrachten eine Einbettung von $G$. $R$ seien die durch die Einbettung entstehenden Gebiete. Jedes Gebiet wird von mindestens 3 Kanten begrenzt und jede Kante begrenzt höchstens zwei Gebiete. Daraus folgt, dass $3|R| \leq 2|E|$. Und zusammen mit der eulerschen Formel erhalten wir

$$\frac{2}{3}|E| \geq |R| = |E| - |V| + 2.$$

Daraus folgt aber, dass

$$\frac{1}{3}|E| \leq |V| - 2.$$

Multiplizieren wir nun beide Seiten mit 3, so erhalten wir das gewünschte Resultat. □

Aus Satz 2.43 folgt, dass der $K_5$ nicht planar ist. Der $K_5$ hat nämlich $\binom{5}{2} = 10$ Kanten aber nur 5 Knoten und $10 \not\leq 3 \cdot 5 - 6$. Mit einem ähnlichen Argument kann man zeigen, dass der $K_{3,3}$ nicht planar ist, siehe Übungsaufgabe 2.18.